LEZIONE 32

lunedì 12 dicembre 2022 08:58

Equazioni differenziali ordinarie (EDO / ODE)

Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui compaiono:

- Una variabile x
- Una funzione incognita $y(x)$ ← da determinare
- Alcune derivate di y.

ESEMPI

- $y'(x) + x\,y(x) = 0$
- $y''(x) - y'(x) = x\cos(y(x))$
- $\dfrac{y'''(x)+1}{1+(y'(x))^2} = y'(x) - y(x) + x$

Def Un'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA è un'espressione del tipo $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ dove $F: \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ (oppure $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$) e y è una funzione incognita.

Def. Il numero $n \in \mathbb{N}$, cioè l'ordine di derivazione massimo con cui y appare nell'equazione si dice ORDINE dell'equazione differenziale

- $y'(x) + y(x) = 2x\,y(x)$ ordine 1
- $y'''(x) = x^2(y''(x) + y(x))$ ordine 3

Molto spesso si scrive direttamente y invece di $y(x)$:
Ad esempio:

$$y''(x) + y'(x) = x\, y(x)$$ si scrive anche come

$$y'' + y' = x\, y$$

Def Si dice che un'equazione differenziale è in **FORMA NORMALE** se è del tipo:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

ESEMPI

$y' + y = 2xy$ non è in forma normale

$y' = 2xy - y$ è in forma normale.

Notazioni alternative

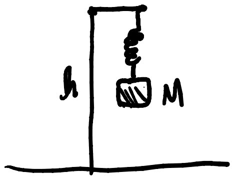
- $y(x)$ incognita, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ← usiamo questa
- $y(t)$ incognita, $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
- $x(t)$ incognita, $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

} molto usate in fisica.

Motivazioni

Le equazioni differenziali descrivono l'evoluzione di fenomeni fisici al variare del tempo.

ESEMPIO:



- $y(t)$ altezza al tempo t.
- $y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ velocità al tempo t
- $y''(t)$ accelerazione al tempo t.

Equazione di Newton: $F = M y''$

dove F è la risultante delle forze che agiscono sulla massa M.

$$F = -Mg - K(y - (h - l_0))$$ (dove l_0 è la lunghezza a riposo della molla.)

$$M y'' = -Mg - K\,(y - (h - \ell_0))$$

è un'eq. differenziale di II ordine.

Un'equazione differenziale ha infinite soluzioni:

ESEMPIO

$$y' = y$$

Una soluzione è $y(x) = e^x$

$y(x) = 0$

$y(x) = 2e^x$

$y(x) = Ke^x \quad \forall K \in \mathbb{R}.$

Si può dimostrare che le soluzioni di $y' = y$ sono tutte del tipo $y(x) = Ke^x$ con $K \in \mathbb{R}$.

Def: Si dice INTEGRALE GENERALE / SOLUZIONE GENERALE dell'equazione differenziale l'insieme di tutte le soluzioni.

ESEMPI

- $y'' = -y$

  $y(x) = \sin x$ e $y(x) = \cos x$ sono soluzioni

Più in generale: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ è soluzione. Si può dimostrare che le soluzioni sono tutte di questo tipo.

È molto comune associare ad una EDO delle condizioni iniziali. Si considerano problemi del tipo:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ \left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right\} \text{n condizioni: tante quante l'ordine dell'eq.} \end{cases}$$

Questo tipo di problemi sono noti come

PROBLEMI DI CAUCHY.

Nota: L'equazione $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ ha infinite soluzioni mentre i problemi di Cauchy ne hanno una sola.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' = x^2$$

y è una primitiva di x^2.

$$y = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + c$$

Possiamo dire che $y(x) = \frac{1}{3} x^3 + c$ è la soluzione generale dell'equazione $y' = x^2$.

Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 2$.

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3 + c \quad \text{quindi}$$

$y(0) = 2 \iff 2 = \frac{1}{3}\cdot 0^3 + C \iff C = 2$

Quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' = x \\ y(1) = \frac{3}{2} \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Prima consideriamo l'equazione $y'' = x$

$y' = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1$

$y = \int \frac{1}{2}x^2 + C_1 \, dx = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$

La soluzione generale dell'equazione è

$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$

Determiniamo C_1 e C_2 usando le condizioni iniziali:

- $y(1) = \frac{3}{2} \iff \frac{3}{2} = \frac{1}{6} + C_1 + C_2$
- $y'(1) = 0 \qquad y'(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1$

  Quindi $y'(1) = 0 \iff 0 = \frac{1}{2} + C_1$

Dobbiamo risolvere un sistema

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{1}{6} + C_1 + C_2 \\ 0 = \frac{1}{2} + C_1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \\ C_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{6}$

Equazioni differenziali integrabili

- $y' = f(x)$ (ordine 1)
- $y^{(n)} = f(x)$ (ordine n)

Si risolve integrando n volte:
La soluzione generale è

$$y(x) = \int \left(\int \left(\int \dots \int f(x)\,dx \right) dx \right) \dots \Big) dx$$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $y''' = \cos x$.

$$y'' = \int \cos x \, dx = \sin x + c_1$$

$$y' = \int \sin x + c_1 \, dx = -\cos x + c_1 x + c_2$$

$$y = \int -\cos x + c_1 x + c_2 \, dx$$

$$= -\sin x + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = -\sin x + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 .$$

Non tutte le equazioni differenziali si possono risolvere in questo modo.

$$y' = y$$

Se integriamo:

$$y(x) = \int y(x)\, dx$$

Siccome non conosciamo $y(x)$ non possiamo calcolare l'integrale.

Dimostriamo che le soluzioni sono tutte del tipo $y = Ke^x$.
Sia y una soluzione. Chiamiamo $z(x) = y(x)e^{-x}$
Allora
$$z'(x) = y'(x)e^{-x} + y(x)e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\big(y'(x)-y(x)\big) = 0$$
Quindi $z' = 0$. $\Rightarrow z = \int 0\,dx = K \in \mathbb{R}$.
Quindi $y(x)e^{-x} = K \Rightarrow y(x) = Ke^x$.

Equazioni lineari di I ordine

Sono equazioni del tipo:
$$y' = a(x)\,y + g(x)$$
dove $a, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, a, g continue in I.

L'equazione si dice
- OMOGENEA se $g(x) = 0$ $\quad (y' = a(x)\,y)$
- COMPLETA se $g(x) \neq 0$ $\quad (y' = a(x) + g(x))$

Caso omogeneo:

$$y' = a(x)\,y.$$

- Abbiamo già visto che se $a(x) = 1$ cioè se l'eq. è $y' = y$ la soluzione generale è $y(x) = Ke^x$.

- $y' = 2y$

La soluzione generale è $y(x) = Ke^{2x}$

TEOREMA

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $a: I \to \mathbb{R}$ continua in I. Allora la soluzione generale di $y' = a(x)\, y$ è $y(x) = K e^{A(x)}$ dove A è una primitiva di a e $K \in \mathbb{R}$.

DIM

Sia $y(x)$ una soluzione e sia $z(x) = y(x)\, e^{-A(x)}$.

$$z'(x) = y'(x)\, e^{-A(x)} + y(x)\, e^{-A(x)} (-A(x))'$$
$$= y'(x)\, e^{-A(x)} - y(x)\, e^{-A(x)}\, a(x)$$
$$= e^{-A(x)} \big(\underbrace{y'(x) - y(x)\, a(x)}_{=0.} \big) = 0$$

Quindi $z'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tale che $z(x) = K$. Allora $y(x)\, e^{-A(x)} = K \Rightarrow y(x) = K e^{A(x)}$.

ESEMPIO

$$y' = x\, y$$

è un'eq. lineare omogenea di I ordine del tipo $y' = a(x)\, y$ con $a(x) = x$.

Cerchiamo una primitiva di $a(x)$:

$$\int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Scegliamo $A(x) = \frac{1}{2} x^2$.

La soluzione generale è $y(x) = K e^{\frac{1}{2} x^2}$ con $K \in \mathbb{R}$.

OSS

Se A_1 e A_2 sono primitive di a. Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $A_1 = A_2 + c$. Allora:

$$K e^{A_1(x)} = K e^{A_2(x) + c} = \underbrace{K e^{c}}_{= K_2 \in \mathbb{R}.} e^{A_2(x)}$$

ESEMPIO 2

$$y' = \sin(2x)\, y$$

L'equazione è lineare omogenea del tipo $y'(x) = a(x) y$ dove $a(x) = \sin(2x)$.

$$\int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

Scegliamo $A(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ e la soluzione generale è

$$y(x) = K e^{-\frac{1}{2}\cos(2x)}.$$

ESEMPIO 3

Risolviamo il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{(3x-1)^2} \\ y(0) = e \end{cases}$

Risolviamo prima l'equazione

$$y' = \frac{y}{(3x-1)^2} = \frac{1}{(3x-1)^2} \cdot y$$

È un'equazione lineare omogenea di I ordine con $a(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$

$$\int \frac{1}{(3x-1)^2}\, dx = \int (3x-1)^{-2} dx = \frac{1}{3}\left(-(3x-1)^{-1}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{3x-1} + c$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-3x} + c \qquad \left(\text{Scelgo } A(x) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-3x}\right)$$

La soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = K e^{\frac{1}{3}\frac{1}{1-3x}}$$

Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo $y(0) = e$.

$$e = K e^{\frac{1}{3}\cdot 1} = K e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow K = \frac{e}{e^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{2}{3}}$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = e^{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3}\frac{1}{1-3x}} = e^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-3x}}.$$

Equazioni lineari di I ordine non omogenee:

$$y' = a(x)\, y + g(x) \quad \text{con} \quad g(x) \neq 0.$$

OSS:

Consideriamo due equazioni del tipo:

$$y' = a(x)\, y + g_1(x) \qquad (1)$$

e

$$y' = a(x)\, y + g_2(x) \qquad (2).$$

Siano y_1 una soluzione di (1) e y_2 una soluzione di (2). Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $z(x) = \alpha\, y_1(x) + \beta\, y_2(x)$ risolve $z' = a(x)\, z + \alpha\, g_1(x) + \beta\, g_2(x)$.

In particolare se $g_1 = g_2$ allora $y_1 - y_2$ risolve $z' = a(x)\, z$

CONSEGUENZA.

Se conosciamo una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'eq. completa $y' = a(x)\, y + g(x)$ allora la soluzione generale è del tipo $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$ dove $y_0(x)$ è la soluzione generale dell'eq. omogenea $y' = a(x)\, y$.

L'equazione completa $y' = a(x)\,y + g(x)$ si risolve in tre passi:

1) Scrivere la soluzione generale $y_0(x)$ di $y' = a(x)\,y$.
2) Si cerca una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione completa.
3) La soluzione generale dell'eq. completa è
$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x).$$

Il punto delicato è 2). Ci sono due metodi:

- METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI : $\bar{y}(x) = K(x)\,e^{A(x)}$.
- METODO DI SIMILARITÀ / SOMIGLIANZA (solo $a(x) = a$ costante)
  Si cerca $\bar{y}$ "simile" a g

ESEMPIO

$$y' = 2y + e^{5x}$$

È un'eq. lineare di I ordine completa con $a(x) = 2$ e $g(x) = e^{5x}$.

1) Risolvo $y' = 2y$.
   $\int 2\,dx = 2x + c$. Scelgo $A(x) = 2x$.
   La soluzione generale dell'equazione omogenea è
   $y_0(x) = K\,e^{2x}$.

2) Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'eq. completa.
   Cerchiamo $\bar{y}$ della forma $\bar{y}(x) = K(x)\,e^{2x}$.
   $\bar{y}'(x) = K'(x)\,e^{2x} + K(x)\,e^{2x}\cdot 2$

L'equazione $y' = 2y + e^{5x}$ è soddisfatta se e solo se $\bar{y}' = 2\bar{y} + e^{5x}$ cioè

$$K'(x)e^{2x} + \cancel{K(x)e^{2x}\cdot 2} = \cancel{2K(x)e^{2x}} + e^{5x}$$

$$K'(x)e^{2x} = e^{5x} \Rightarrow K'(x) = \frac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{3x}$$

$$K'(x) = e^{3x} \Rightarrow K(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Scegliamo $K(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ e

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot e^{2x} = \frac{1}{3}e^{5x}.$$

3) La soluzione generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = \frac{1}{3}e^{5x} + K e^{2x} \quad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$